第1章　数と式

1　式の計算

チェックポイント

1　整　式

(1)　**単項式と多項式**

$-2x^2y^3$ のように，いくつかの文字や数の積として表されている式を**単項式**という。また，x^3-3xy^2+5 のように，いくつかの単項式の和の形に表されている式を**多項式**という。2つ以上の単項式において，文字の部分が同じである項を**同類項**という。

(2)　**整式と次数·定数項**

単項式と多項式を合わせて，一般に**整式**という。整式において，各項の次数のうちいちばん高いものを，その整式の**次数**という。また，整式の項のなかで着目した文字を含まない項を**定数項**という。

(3)　**降べきの順**

1つの文字の次数に着目して，整式を次数の高い方から順に並べて整理することを**降べきの順**にするという。

(例)①$5x^2-4x^3+2+3x$ を x の降べきの順にすると，

$-4x^3+5x^2+3x+2$

②$5y^2+7x^2-3xy$ を

x の降べきの順にすると，$7x^2-3xy+5y^2$

y の降べきの順にすると，$5y^2-3xy+7x^2$

(4)　**整式の加法·減法**

整式の加法と減法は同類項を1つにまとめることにより行う。

(例) $(3x^2+5x+1)+(2x^2+3x-4)=(3+2)x^2+(5+3)x+1-4$

$=5x^2+8x-3$

2　指数法則

(1)　m，n が正の整数のとき

$a^m a^n=a^{m+n}$　　$(a^m)^n=a^{mn}$　　$(ab)^n=a^n b^n$

(2)　$a\neq 0$，$b\neq 0$ で，m，n が整数のとき
発展

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$　　$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

⬅ 参考 ➡

単項式において，数の部分をその単項式の**係数**といい，かけ合わせた文字の個数をその単項式の**次数**という。

多項式において，各単項式をその多項式の**項**という。

⬅ 参考 ➡

これに対し，次数の低い方から並べて整理することを**昇べきの順**にするという。

⬅ キーポイント ➡

$2^1=2$,　$2^2=4$,　$2^3=8$

⬅ 参考 ➡

指数法則(2)および以下は，「数学Ⅱ」で学習する。発展

$2^0=1$,　$2^{-1}=\dfrac{1}{2}$,　$2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

3　整式の乗法（式の展開）

単項式と多項式の積，多項式どうしの積などをそれぞれ計算して，1つの整式で表すことを，その積を**展開する**という。

展開の方法は，

①分配法則を使って展開する。

②展開の公式を使って展開する。

展開した整式は，降べきの順に整理しておく。

4　因数分解

整式をいくつかの整式の積の形にすることを**因数分解**という。因数分解は，展開の逆の計算である。

因数分解の方法は，

①共通因数でくくる。

②因数分解の公式を用いる。

③式の一部を置き換えて，因数分解の公式を用いる。

④適当に項を組み合わせて共通因数でくくる。

5　展開の公式と因数分解の公式

展開の公式

(1)　$m(a+b-c)=ma+mb-mc$

(2)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4)　$(x+a)(x+b)$

$=x^2+(a+b)x+ab$

(5)　$(ax+b)(cx+d)$

$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) 発展　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) 発展　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

因数分解の公式

(1)　$ma+mb-mc=m(a+b-c)$

(2)　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3)　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4)　$x^2+(a+b)x+ab$

$=(x+a)(x+b)$

(5)　$acx^2+(ad+bc)x+bd$

$=(ax+b)(cx+d)$

(6) 発展　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(7) 発展　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⬅ キーポイント ➡

展開の公式と因数分解の公式

展開と因数分解は逆の計算である。したがって，展開の公式と因数分解の公式は，左辺と右辺が逆になっている。

⬅ 参考 ➡

展開の公式(6)，(7)と，因数分解の公式(6)，(7)は，「数学Ⅱ」で学習する。発展

⬅ 参考 ➡

次の展開の公式も覚えておくと便利である。発展

・　$(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

・　$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=a^4+a^2b^2+b^4$

・　$(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$

・　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

例題と解法

1 次の整式の同類項をまとめて簡単にせよ。

$-5a^2+3a-4a+7a^2$

〔解法〕$-5a^2$ と $7a^2$ が同類項，$3a$ と $-4a$ が同類項で，まとめることができる。

〔解答〕$-5a^2+3a-4a+7a^2=-5a^2+7a^2+3a-4a$

$=(-5+7)a^2+(3-4)a$

$=\boldsymbol{2a^2-a}$ ……………答

2 $A=x^2+3xy+y^2$，$B=-4xy-2x^2-y^2$ のとき，$A+B$ を計算せよ。

〔解法〕$A+B$ に式を代入して x，y の式にし，同類項どうしをまとめる。

〔解答〕$A+B=(x^2+3xy+y^2)+(-4xy-2x^2-y^2)$

$=x^2+3xy+y^2-4xy-2x^2-y^2$

$=x^2-2x^2+3xy-4xy+y^2-y^2$

$=\boldsymbol{-x^2-xy}$ ……………答

3 次の計算をせよ。

(1) $x^3\times xy\times 2y^2$

(2) $(2x)^3$

〔解法〕指数法則を用いて簡単な形にする。

〔解答〕(1) $x^3\times xy\times 2y^2=2x^{3+1}y^{1+2}$

$=\boldsymbol{2x^4y^3}$ ……………答

(2) $(2x)^3=2x\times 2x\times 2x=2^3x^3=\boldsymbol{8x^3}$ ……………答

⬅ キーポイント ➡

多項式の加法・減法

① かっこ（ ）があればかっこをはずす。このとき符号に注意する。

② 同類項どうしをまとめる。

③ 1つの文字に注目し，降べきの順に整理する。

⬅ 参考 ➡

加法・減法の計算

左の計算は，次のように縦書きにして計算することもできる。その際，必ず降べきの順に整理して，同類項を縦にそろえて書く。

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +3xy & +y^2 \\ +\big) & -2x^2 & -4xy & -y^2 \\ \hline & -x^2 & -xy & \end{array}$$

4 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2y)^2+(x-2y)^2$

(2) $(x-1)(x+2)(x-2)(x+1)$

〔解法〕(1) 展開してから同類項どうしをまとめる。

(2) 計算の順序を工夫して，展開の公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を用いる。

〔解答〕(1) 与式$=(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4xy+4y^2)$

$=\boldsymbol{2x^2+8y^2}$ ……………答

(2) $(x-1)(x+2)(x-2)(x+1)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$=(x^2-1)(x^2-4)$

$=\boldsymbol{x^4-5x^2+4}$ ……………答

⬅ キーポイント ➡

上手な展開の方法

展開の公式に直接あてはめにくいときは，**文字の置き換えや項の入れ換え**を行ってみる。

5 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3-2ax^2+2x-4a$

(2) $8x^3+27$
発展

〔解法〕(1) a について整理し，共通因数をくくる。

(2) A^3+B^3 の形を考えて，因数分解の公式 $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ を用いる。

〔解答〕(1) 与式$=-2a(x^2+2)+x^3+2x$

$=-2a(x^2+2)+x(x^2+2)$

$=\boldsymbol{(x-2a)(x^2+2)}$ ……………答

(2) 与式$=(2x)^3+(3)^3$

$=(2x+3)\{(2x)^2-2x\cdot 3+3^2\}$

$=\boldsymbol{(2x+3)(4x^2-6x+9)}$ ……………答

⬅ キーポイント ➡

上手な因数分解の方法

式の中に 2 つ以上の文字が含まれているときは，**次数の小さい文字について整理する**とよい。

基本問題

1 次の式の同類項をまとめて簡単にせよ。

(1)　$2a-3b-3a+b$

(　　　　　　　　)

(2)　$-3x^2-2x+x^2+3x$

(　　　　　　　　)

(3)　$6ab+3bc-5ac+ac-ab-bc$

(　　　　　　　　)

(4)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{12}$

(　　　　　　　　)

2 次の計算をせよ。

(1)　$2a+(3a-b)$

(　　　　　　　　)

(2)　$(a-5b)-(2a-8b)$

(　　　　　　　　)

(3)　$5x+\{2x-(3x+9)\}$

(　　　　　　　　)

3 次の各組の式の和 $A+B$ を求めよ。また，差 $A-B$ を求めよ。

(1)　$A=3x^2+5x-3$，$B=-x^2+3x+4$

$A+B$(　　　　　　　　)

$A-B$(　　　　　　　　)

(2)　$A=x^2+\dfrac{1}{2}xy-\dfrac{2}{3}y^2$，$B=\dfrac{1}{3}x^2-xy-\dfrac{1}{2}y^2$

$A+B$(　　　　　　　　)

$A-B$(　　　　　　　　)

⬅ ヒント ➡

分数があれば，通分する。

⬅ 注意 ➡

同類項どうしをまとめる。また，かっこ(　)の前が－(マイナス)のときは，符号に注意する。

$(3x^2+5x-3)-(-x^2+3x+4)$

$=3x^2+5x-3+x^2-3x-4$

4 次の計算をせよ。

(1)　$(-x)^5$

(　　　　　　　　)

(2)　$(3x^2y^3)^2$

(　　　　　　　　)

(3)　$2x(-xy^2)^3$

(　　　　　　　　)

5 次の計算をせよ。

(1)　$(2x^3-2x+1)(x^2-2x+3)$

(　　　　　　　　)

(2)　$(5m-2n)(m^2-4mn-3n^2)$

(　　　　　　　　)

6 次の式を因数分解せよ。

(1)　$3ax^2-6bx$

(　　　　　　　　)

(2)　$x^2+8x+16$

(　　　　　　　　)

(3)　$3x^2-7xy-6y^2$

(　　　　　　　　)

(4)　x^4-y^4

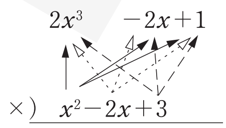
(　　　　　　　　)

(5) 発展　$x^3-y^3+xy(x-y)$

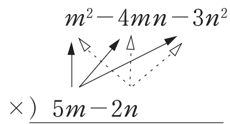
(　　　　　　　　)

⬅ ヒント ➡

(1)



(2)



多項式の乗法を縦書きで行うときは，降べきの順に整理し，項の抜けた部分はあけておく。また，次数の大きい方を上にすると，計算がしやすい。

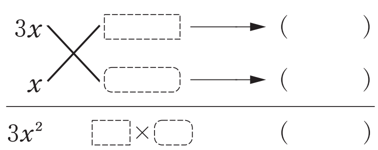
⬅ ヒント ➡

(1)　共通因数をくくる。

(2)　与式$=x^2+2\times4x+4^2$

因数分解の公式(2)を利用する。

(3)　x についての 2 次式とみて，因数分解の公式(5)を利用する。たすきがけを行う。



(5)　因数分解の公式(7)を利用する。

応用問題

1 $A=3x^2-xy+2y^2$，$B=y^2+3xy+2x^2$，$C=3x^2-4y^2$ のとき，次の式を計算せよ。

(1) $3A-2B+C$

(　　　　　　　　　　)

(2) $A-2(2B+C)$

(　　　　　　　　　　)

(3) $\frac{1}{6}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{3}C$

(　　　　　　　　　　)

2 $3x-2y+4$ にどんな整式を加えると，その和は $3x+5y-6$ になるか。

(　　　　　　　　　　)

3 次の式を展開せよ。

(1) $(x+y-z)(x-y+z)$

(　　　　　　　　　　)

(2) $(2a-3b)^3$
発展

(　　　　　　　　　　)

(3) $(1-a)(1+a+a^2)(1+a^3+a^6)$
発展

(　　　　　　　　　　)

◆ヒント◆
展開の公式を利用する。展開の公式に直接あてはめにくいときは，文字を置き換えたり，項を入れ換えたりする。

4 次の式を展開したときの x^2 の係数，x^3 の係数をそれぞれ求めよ。

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$

x^2 の係数(　　　　　　　　　　)

x^3 の係数(　　　　　　　　　　)

◆ヒント◆
$(\quad)^4$ を $\{(\quad)^2\}^2$ として，平方を 2 回行う。その際，x^4 以上の項は無関係であるから，x^3 以下の項をまず 2 乗し，得られた式の x^3 以下の項を選び，再び 2 乗する。

5 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^4+x^2+1

(　　　　　　　　)

(2)　$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

(　　　　　　　　)

(3)　$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

(　　　　　　　　)

← ヒント →

(1)　$x^4+x^2+1=x^4+2x^2-x^2+1$

$=x^4+2x^2+1-x^2$

この形から (x^4+2x^2+1) の因数分解を行い，平方の差にする。

(2)　与式を a について整理する。

(3)　次のように組み合わせて展開する。

$(x+1)(x+7)=x^2+8x+7$

$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$

6 発展 等式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を利用して，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(　　　　　　　　)

← ヒント →

与式$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

7 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2y+xy^2-(x^2+2xy+y^2)+x+y$

(　　　　　　　　)

(2)　$4x^2+4xy+y^2-6x-3y-10$

(　　　　　　　　)