第6章　場合の数と確率

1　場合の数

チェックポイント

1　集合の要素の個数

集合 P の要素の個数を $n(P)$ で表す。

(1)　2つの部分集合 A，B について，和集合 $A\cup B$ の要素の個数は，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

特に $A\cap B=\phi$ のとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

(2)　3つの部分集合 A，B，C について，和集合 $A\cup B\cup C$ の要素の個数は，

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(C\cap A)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$$

特に，A，B，C のどの2つの共通部分も空集合 ϕ のとき，

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

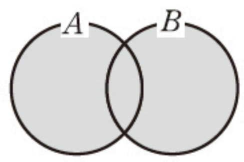
(3)　U を全体集合として，その部分集合 A の補集合 $\overline{A}$ の要素の個数は，

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

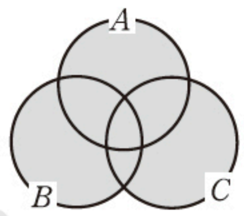
⬅参考➡

左の関係式は，図を用いると理解しやすい。

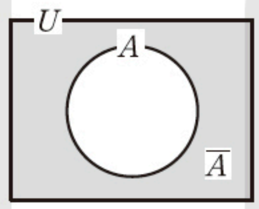
(1)



(2)



(3)



2　場合の数

ある事柄が起こるすべての場合の総数を**場合の数**という。場合の数を数えるには，もれることなく，また重複することなく数えあげねばならない。

3　和・積の法則

(1)　**和の法則**

2つの事柄 A，B について，これらは同時に起こらないとする。A の起こり方が $n(A)$ 通り，B の起こり方が $n(B)$ 通りあるとすれば，A または B のどちらかが起こる場合の数は，

$\boldsymbol{n(A)+n(B)}$（通り）

(2)　**積の法則**

2つの事柄 A，B について，A の起こり方が $n(A)$ 通り，A の1つの起こり方に対しての B の起こり方が $n(B)$ 通りずつあるとすれば，A と B の組 $(A,\ B)$ が起こる場合の数は，

$\boldsymbol{n(A)\times n(B)}$（通り）

⬅参考➡

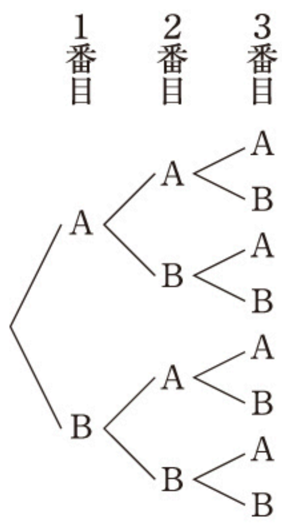
数え方には，英和辞書のようにアルファベット順に並べる**辞書式配列**，各場合を次々と枝分かれする図で表す**樹形図**（tree）がある。

（辞書式配列の例）

AAA，AAB，ABA，ABB，

BAA，BAB，BBA，BBB

（樹形図の例）



4　順列

異なる n 個のものから r 個を取り出して並べる方法の数（n 個のものから r 個を取り出した**順列**の総数）は，

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(1)　**重複順列の個数**

異なる n 個のものの中から，重複を許して r 個を取り出した順列を**重複順列**といい，その総数は，$\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\cdots\times n}_{r\text{個}}=n^r$ で，このとき，$r>n$ でもよい。

(2)　**円順列の個数**

異なる n 個のものを円形に並べる順列を**円順列**といい，その総数は，

$(n-1)!$

(3)　**じゅず順列の個数**

異なる n 個のものを円形に並べる**じゅず順列**の総数は，(2)の円順列の総数のうち，裏返しても同じになる半数をのぞくから，その総数は，

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

5　組合せ

(1)　**組合せの個数**

n 個のものから r 個を取り出した組合せの総数は，

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(2)　**${}_n\mathrm{C}_r$ の性質**

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$（$0\leqq r\leqq n$）

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$（$1\leqq r\leqq n-1$，$n\geqq 2$）

(3)　**重複組合せ**

異なる n 個のものから重複を許して r 個とる組合せの総数は，

${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ 通りある。

（発展 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ を ${}_n\mathrm{H}_r$ と表すこともある）

6　同じものを含む順列の個数

n 個のうち，a が p 個，b が q 個，c が r 個，……であるとき，その順列の総数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}\quad(n=p+q+r+\cdots\cdots)$$

⬅ キーポイント ➡

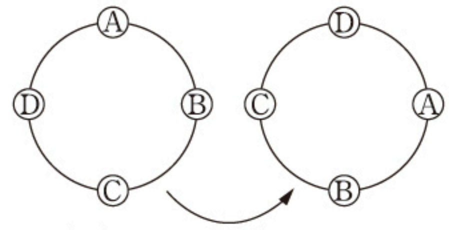
階乗

1 から n までの連続する n 個の整数の積を n の**階乗**といい，$n!$ で表す。また，$0!=1$ と定義する。

⬅ キーポイント ➡

円順列

円形に並べるとき，次のように回転して重なるものは 1 通りと考える。

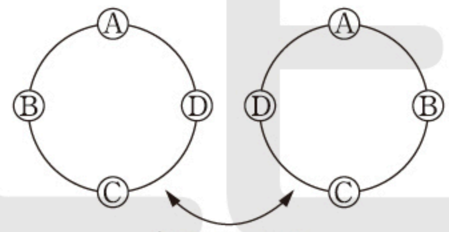


時計回りに90° 回転すると同じ

⬅ キーポイント ➡

じゅず順列

じゅずは次のように裏返したものも同じとみなす。



裏返すと同じ

⬅ 参考 ➡

組分け

①　分配の組合せ

n 人を p 人，q 人，r 人（p，q，r はそれぞれ異なる）の 3 つのグループに分ける方法は，

${}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q(\times 1)$（通り）

②　組分け

分ける先が区別できないときは，その場合の数で割る。

n 人を p 人ずつの q 組に分ける方法は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_p\times\cdots\cdots}{q!}\ (\text{通り})$$

例題と解法

1 1から100までの整数について，次の個数を求めよ。
(1) 3かつ4の倍数の個数
(2) 3または4の倍数の個数

〔解法〕(1) 3かつ4の倍数は，12の倍数である。

〔解答〕3の倍数の集合をA，4の倍数の集合をBとすると，$n(A)=33$（個），$n(B)=25$（個）である。

(1) 3と4は互いに素なので，3かつ4の倍数は12の倍数である。

$100\div12=8$ あまり 4

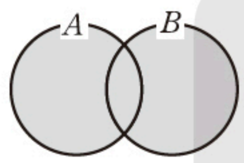
よって，$n(A\cap B)=\mathbf{8}$ **（個）** ……………答

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=33+25-8=\mathbf{50}$ **（個）** ……………答

← 参考 →

和集合 $A\cup B$ の要素の個数



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

2 大小2つのサイコロを同時に投げるとき，目の数の和が10以上になる場合の数を求めよ。

〔解法〕和が10，11，12になる場合について分けて考える。

〔解答〕和が10になる場合は，（4，6），（5，5），（6，4）の3通り

和が11になる場合は，（5，6），（6，5）の2通り

和が12になる場合は，（6，6）の1通り

これらは互いに同時に起こらないので，和の法則を用いて，

$3+2+1=\mathbf{6}$ **（通り）** ……………答

← キーポイント →

同時に起こらない場合は，和の法則を用いる。

3 7個の数字　0，1，2，3，4，5，6のうち，異なるものを使ってできる4桁の整数の個数を求めよ。

〔解法〕4桁という条件から，千の位に0は使えない。

〔解答〕千の位には0以外の各数字がくるので6通り。残りの3桁は，${}_6P_3$通りの選び方があるので，

$6\times{}_6P_3=6\times6\times5\times4=$ **720**（個）　……………答

4 男子5人と女子4人の9人の中から4人の委員を選ぶとき，男子2人，女子2人を選ぶ場合の数を求めよ。

〔解法〕男子は5人から2人，女子は4人から2人をとる組合せで，両方の関係は積の法則にしたがう。

〔解答〕男子2人の選び方は，${}_5C_2=10$　女子の2人の選び方は，${}_4C_2=6$

よって，$10\times6=$ **60**（通り）　……………答

⬅ キーポイント ➡

男子の選び方と女子の選び方は同時に起こるので，積の法則を用いる。

5 6人を2つのグループA，Bに分ける方法は，次の条件(1)，(2)の場合，それぞれ何通りあるか求めよ。

(1)　6人全員が同じグループに入ってもよい場合。

(2)　各グループには少なくとも1人は入るものとする場合。

〔解法〕6人を1列に並べ，その1人1人にグループの名が書いてある札A，Bを渡していくと考える。

〔解答〕(1)　求める方法の総数は重複順列であるから，

$2^6=64$　より，**64通り**　……………答

(2)　(1)で求めた64通りの方法のうち，

①全員がグループAに入る　　②全員がグループBに入る

①，②の2通りを除けばよいから，

$64-2=62$　より，**62通り**　……………答

⬅ キーポイント ➡

「少なくとも1人は入る」方法の総数は，6人を2つのグループに分けるすべての方法の総数から「全員が片方のグループに入り，もう片方のグループは0人になる」場合を除けばよい。

基本問題

1 全体集合を U，その部分集合を A，B とする。

$n(U)=70$，$n(A)=30$，$n(B)=20$，$n(A\cap B)=4$

であるとき，次の数を求めよ。

(1) $n(\overline{A})$

(　　　　　　　)

(2) $n(A\cup B)$

(　　　　　　　)

(3) $n(A\cap\overline{B})$

(　　　　　　　)

(4) $n(A\cup\overline{B})$

(　　　　　　　)

2 5人が1回ジャンケンをすると，その出し方は何通りあるか。

(　　　　　　　)

3 600の正の約数（1と600を含む）は全部でいくつあるか。

(　　　　　　　)

4 25人の生徒の中から，委員長，副委員長，書記を各1人ずつ選びたい。全体で何通りの選び方があるか。ただし，兼任はできないものとする。

(　　　　　　　)

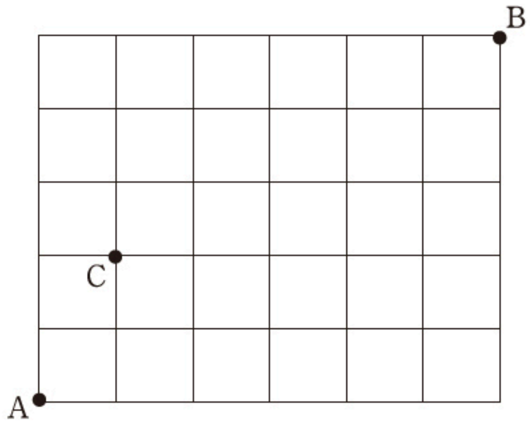
⬅ ヒント ➡

1人につきそれぞれグー，チョキ，パーの3通りの出し方がある。

⬅ ヒント ➡

兼任はできないので，25人のうち3人を1人ずつ選び出して，委員長，副委員長，書記の順に並べる並べ方を考える。

5 右の図の線上を通って A から B に進む最短路（右方向と上方向だけに進む）について，次の問に答えよ。



(1) 進み方は何通りあるか。

(　　　　　　　　)

(2) C を通る進み方は何通りあるか。

(　　　　　　　　)

← 考え方 →

(1) 右に 1 つ進むことを a，上に 1 つ進むことを b と表せば，A から B に進む最短路の選び方は，6 つの a と 5 つの b を並べる並べ方の総数に等しい。よって，同じものを含む順列の個数で計算できる。

(2) A から C まで進み，さらに C から B まで進むので，積の法則が成り立つ。

6 男子 8 人，女子 5 人の中から 4 人の委員を選ぶとき，次の場合の数を求めよ。

(1) 男子から 3 人，女子から 1 人選ぶ場合の数

(　　　　　　　　)

(2) 男子，女子から少なくとも 1 人ずつ選ぶ場合の数

(　　　　　　　　)

← ヒント →

(2) 男子，女子から少なくとも 1 人ずつ選ぶことの排反事象は 4 人とも男子または 4 人とも女子の委員を選ぶことである。

(排反事象…P.152 チェックポイント 1 (5))

7 9 人の組分けについて，次の問に答えよ。

(1) 9 人を 3 つの旅館に 3 人ずつに分けて泊める方法は何通りあるか。

(　　　　　　　　)

(2) 9 人を 3 人ずつ 3 つの組に分ける方法は何通りあるか。

(　　　　　　　　)

← 考え方 →

(1) A の旅館に泊まる 3 人を選び，各々の場合の残り 6 人の中から B の旅館に泊まる 3 人を選ぶ。

(2) 各組がどの旅館に泊まるかの区別がない。

応用問題

1 7 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の中から異なる 4 個の数字を 1 列に並べてできる 4 桁の整数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1) 一の位の数が 0

(　　　　　　　　　)

(2) 一の位の数が 5

(　　　　　　　　　)

(3) 偶数

(　　　　　　　　　)

2 1 組の父母と，4 人の子供が円卓に座るとき，次の問に答えよ。

(1) 座り方は何通りあるか。

(　　　　　　　　　)

(2) 父母が隣り合って座る方法は何通りあるか。

(　　　　　　　　　)

(3) 父母が隣り合わないように座る方法は何通りあるか。

(　　　　　　　　　)

⬅ ヒント ➡

(1) 円順列を考える。

(2) 父母の 2 人を 1 人として扱って，計 5 人の円順列を考え，各々の場合について，父と母の座る方法を考える。

(3) (1)の場合の数から(2)の場合の数を除いた残りの場合となる。

3 TOKYOTO の 7 文字をすべて使ってできる文字列の総数を求めよ。

(　　　　　　)

← ヒント →

同種のものを含む順列を考える。

T が 2 つ，O が 3 つあることに注意。

4 正十角形において，次の問に答えよ。

(1) 対角線の本数を求めよ。

(　　　　　　)

(2) 3 つの頂点でできる三角形で，もとの正十角形と辺を共有しないものの総数を求めよ。

(　　　　　　)

← ヒント →

(1) 10 の頂点から 2 頂点を選べば対角線が引ける。ただし，辺を除く。

(2) 10 の頂点から 3 頂点を選ぶ。ただし，1 辺を共有するもの，2 辺を共有するものを除く。

5 1 ダースのビンを収納するケースがある。仕切りには 1 から 12 までの番号がついているものとする。いま，3 種類のビンがそれぞれ 5 本，4 本，3 本とあるとき，次の問に答えよ。ただし，同種類のビンは区別できないものとする。

(1) 各種類から 1 本ずつ，合計 3 本のビンをこのケースに入れるとき，何通りの入れ方があるか。

(　　　　　　)

(2) すべてのビンをケースに入れるとき，何通りの入れ方があるか。

(　　　　　　)

← 考え方 →

(1) 12 の仕切りから 3 つ選んで並べる場合を数える。

(2) 同種類のビンは区別できないから，まず 12 から 5 つとる組合せ，次に残り 7 つから 4 つをとる組合せを数える。